

EXERCICE type baccalauréat blanc, niveau Terminale S
BEPICOLOMBO S'ENVOLE VERS MERCURE, UN DEFI TECHNOLOGIQUE.

Certaines parties de ce sujet sont directement inspirées d'annales déjà existantes pour lesquelles on a utilisé des données numériques de la sonde BepiColombo. Nous citons dans ce cas les références. Merci à l'équipe du site labolycee.org pour la mise en ligne des sujets et de leurs corrections.
 D'autres parties ont été spécialement créées. Nous indiquons les liens des sources utilisées dans ces cas.

Partie A : le lancement de la fusée Ariane 5.

A1 : Début du décollage et quantité de mouvement.

D'après Bac S 2013 Amérique du nord, exercice II : station spatiale ISS

1.1. Le système $S = \{\text{fusée} + \text{gaz}\}$ étant supposé isolé, la quantité de mouvement $\vec{p}_S$ du système se conserve au cours du temps. Entre les dates $t = 0$ et $t = 1$ s on a donc :

$$\vec{p}_S(t = 0 \text{ s}) = \vec{p}_S(t = 1 \text{ s})$$

Initialement le système est immobile (on considère que les gaz n'ont pas encore eu le temps d'être éjectés de la fusée) donc $\vec{p}_S(t = 0 \text{ s}) = \vec{0}$ d'où $\vec{0} = \vec{p}_f + \vec{p}_g$,

$$\text{Soit } \vec{0} = M_f \cdot \vec{v}_f + m_g \cdot \vec{v}_g$$

$$\text{donc finalement : } \vec{v}_f = - \frac{m_g}{M_f} \cdot \vec{v}_g$$

Lors du décollage, les gaz sont éjectés vers le bas. La relation précédente montre que la **fusée** est alors **propulsée vers le haut**. Il s'agit d'un exemple de mode de propulsion par réaction.

1.2.

- Entre les dates $t = 0$ et $t = 1$ s, la variation de masse $|\Delta m|$ de la fusée est due à l'éjection de gaz qui a lieu avec un débit D .

La masse m_g des gaz éjectés s'écrit $m_g = D \cdot \Delta t$

Donc $|\Delta m| = D \cdot \Delta t$.

Pour $\Delta t = 1$ s on a : $|\Delta m| = 2,9 \times 10^3 \times 1 = 2,9 \times 10^3$ kg.

En exprimant les masses en tonnes, calculons : $\frac{\Delta m}{M_f} = \frac{2,9}{700 - 2,9} = 4,2 \times 10^{-3} \approx \mathbf{0,4 \text{ \%}}$

La variation de masse $|\Delta m|$ de la fusée au bout d'une seconde après le décollage est inférieure à 1 % de la masse initiale M_f de la fusée : elle est donc négligeable.

- On considère que la masse m_f de la fusée n'a pas varié une seconde après le décollage. Calculons alors la valeur de la vitesse de la fusée :

En projetant la relation $\vec{v}_f = - \frac{m_g}{M_f} \cdot \vec{v}_g$ selon un axe vertical il vient : $v_f = \frac{m_g}{M_f} \cdot v_g$

En laissant les masses en tonnes et la vitesse en km.s^{-1} , il vient : $v_f = \frac{2,9}{700} \times 4,0$

$v_f = 1,7 \times 10^{-2} \text{ km.s}^{-1} = \mathbf{17 \text{ m.s}^{-1}}$.

2.1. Si la vitesse est en réalité nettement inférieure à celle calculée, c'est que le système n'est pas isolé. Le système {fusée + gaz} subit la force **poids** qui le ralentit fortement (et dans une moindre mesure la force de frottement de l'air).

2.2.1. D s'exprime en kg.s^{-1} et v_g s'exprime en m.s^{-1} . Donc $D \cdot v_g$ s'exprime en $\mathbf{\text{kg.m.s}^{-2}}$.

Le produit $D \cdot v_g$ est donc homogène à une masse (kg) multipliée par une accélération (m.s^{-2}).

La deuxième loi de Newton $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$ permet de conclure que le produit $D \cdot v_g$ est homogène à une force.

2.2.2. La fusée peut décoller si la valeur F de la force de poussée $\vec{F} = -D \cdot \vec{v}_g$ est supérieure à la valeur P du poids $\vec{P}$ de la fusée :

$$P = M_f \cdot g. \text{ Soit } P = 700 \times 10^3 \times 9,78 = 6,85 \times 10^6 \text{ N} \quad (\text{convertir } m_f \text{ en kg}).$$

$$F = D \cdot v_g. \text{ Soit } F = 2,9 \times 10^3 \times 4,0 \times 10^3 = 12 \times 10^6 \text{ N}.$$

Comme $F > P$, la fusée peut décoller.

A2 : Début du décollage et lois de Newton.

D'après Bas S sept. 2008 Métropole, exercice II : lancement d'un satellite météorologique

1.1.1. Pour que la fusée décolle, la valeur de la force de poussée F doit être supérieure à celle du poids P (figure ci-contre).

1.1.2. Deuxième loi de Newton appliquée au système {fusée}, dans un référentiel terrestre considéré galiléen : $\vec{F} + \vec{P} = M \cdot \vec{a}$

$$F \cdot \vec{j} - P \cdot \vec{j} = M \cdot a \cdot \vec{j}$$

En projection sur (Oy): $F - P = M \cdot a$

$$F - M \cdot g = M \cdot a$$

Finalement :

$$a = \frac{F}{M} - g$$

1.1.3. $a = \frac{1,16 \times 10^7}{7,00 \times 10^5} - 10 = 6,6 \text{ m.s}^{-2}$

1.1.4. Équation horaire sur la vitesse : à chaque instant, $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$

soit ici $a(t) = \frac{dv}{dt} = 6,6 \text{ m.s}^{-2}$

En primitivant : $v(t) = 6,6t + \text{Cte}$.

Initialement, la vitesse de la fusée est nulle donc $v(0) = 0$ soit $\text{Cte} = 0$ et finalement : **$v(t) = 6,6t$**

1.1.5. Équation horaire sur la position : à chaque instant, $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$, soit ici $v(t) = \frac{dy}{dt} = 6,6t$

En primitivant : $y(t) = 3,3t^2 + \text{Cte}'$.

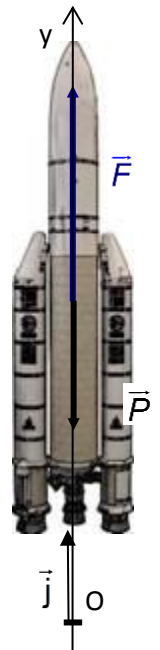
Initialement, le centre d'inertie de la fusée est confondu avec l'origine du repère donc : $y(0) = 0$ soit $\text{Cte}' = 0$ et finalement : **$y(t) = 3,3t^2$**

1.1.6. La distance d parcourue par la fusée jusqu'à la date $t_1 = 6,0 \text{ s}$ est :

$$d = y(t_1) = 3,3 \cdot t_1^2$$

$$d = 3,3 \times 6^2 = 1,2 \times 10^2 \text{ m}$$

1.2. Cas réel : Les forces de frottement, opposées au sens de déplacement de la fusée, n'ont pas été prises en compte dans le cas idéal. Cela peut expliquer l'écart entre 90 m (cas réel) et 120 m (cas idéal).



Partie B : Le voyage jusqu'à Mercure.

Créé à partir des informations de la page <https://astronomia.fr/seminaires/annee1415/assistanceGravit.php> et <https://astronomia.fr/seminaires/annee1314/mecaniqueCeleste.php#periode>

$$1.1. \Delta t = \pi \sqrt{\frac{a_{TM}^3}{G.M_S}}$$

$$\text{Soit } \Delta t = \pi \sqrt{\frac{(103,75 \times 10^9)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}} = 9,11 \times 10^6 \text{ s} = \mathbf{105 \text{ jours.}}$$

$$1.2.1. \text{Durée du vol Terre-Vénus : } \Delta t_1 = \pi \sqrt{\frac{(1,289 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}} = 1,26 \times 10^7 \text{ s} = \mathbf{146 \text{ jours.}}$$

$$\text{Durée du vol Vénus-Mercure : } \Delta t_2 = \pi \sqrt{\frac{(8,305 \times 10^{10})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}} = 6,53 \times 10^6 \text{ s} = \mathbf{75,6 \text{ jours.}}$$

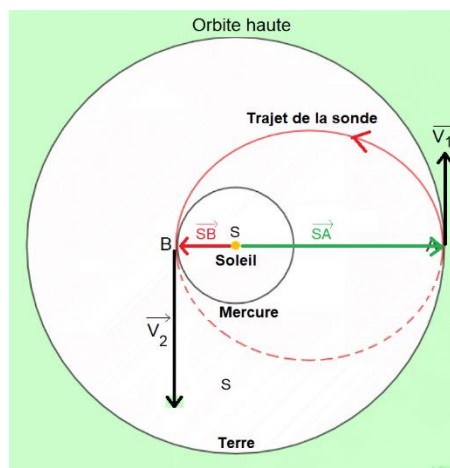
1.2.2. La somme $\Delta t_1 + \Delta t_2 = 222$ jours environ ce qui est supérieur à Δt .

Comme le dit le document 1, « Dans notre cas, il va falloir beaucoup d'énergie pour freiner et ne pas « tomber » dans le Soleil. Le passage près de Vénus pourra permettre de freiner la sonde si on se retrouve dans la situation B décrite dans le document 2.

2. Etude énergétique de la trajectoire de Hohmann.

D'après Bac S 2018 Liban, exercice I : La mission Proxima.

2.1. La deuxième loi de Kepler indique que le rayon vecteur allant du centre du Soleil à la sonde balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.



Sachant que $SA > SB$, il est nécessaire que $V_2 > V_1$ pour que le rayon vecteur balaie la même aire en une même durée.

$$2.2. E_p(A) = - \frac{G. m. M_S}{R_T} \text{ et } E_p(B) = - \frac{G. m. M_S}{R_M}$$

$$\text{Comme } R_T > R_M, \text{ alors } \frac{G. m. M_S}{R_T} < \frac{G. m. M_S}{R_M}$$

$$\text{Cette inégalité s'écrit : } - \frac{G. m. M_S}{R_T} > - \frac{G. m. M_S}{R_M}. \text{ Ce qui revient à dire que : } E_p(A) > E_p(B).$$

2.3. La sonde n'est pas soumise à des forces de frottements : son énergie mécanique est constante.

2.4. $E_M(A) = E_M(B)$

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$$

$$E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B)$$

D'après la question précédente que $E_P(A) > E_P(B)$, donc $E_P(B) - E_P(A) < 0$.

Ainsi $E_C(A) - E_C(B) < 0$.

Alors $E_C(A) < E_C(B)$.

Comme $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, on retrouve, conformément à la deuxième loi de Kepler, que $V_A < V_B$ ou avec les notations de l'énoncé $V_1 < V_2$.

2.5. Au point A : $E_M(A) = E_C(A) + E_P(A)$

$$E_M(A) = \frac{1}{2} m \cdot V_1^2 - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_T}$$

2.6.1. $E_M(A) = E_M(B)$

$$\frac{1}{2} m \cdot V_1^2 - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot V_2^2 - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_M}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot V_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot V_1^2 - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_T} + \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_M}$$

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - \frac{2 G \cdot M_S}{R_T} + \frac{2 G \cdot M_S}{R_M}}$$

$$\text{Soit : } V_2 = \sqrt{(7,80 \times 10^3)^2 + 2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30} \times \left(\frac{1}{57,9 \times 10^9} - \frac{1}{149 \times 10^9} \right)}$$

$$V_2 = 2,87 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

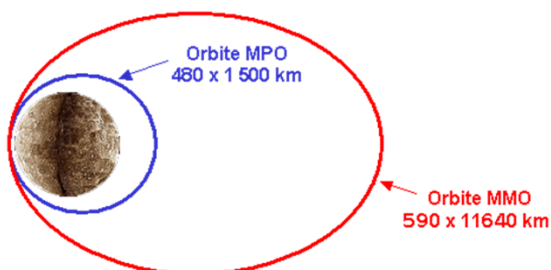
2.6.2. On retrouve $V_2 > V_1$.

2.6.3. La valeur obtenue est importante. Il faut donc trouver des moyens pour freiner cette sonde afin qu'elle ne s'écrase pas sur (ou dans) le Soleil. C'est pour cela que le voyage se fait « en combinant l'action des moteurs ioniques et le recours à l'assistance gravitationnelle » (document 1 et question 1.2.2.).

Partie C : Les deux modules en orbite autour de Mercure.

Créé à partir des données du site <https://www.planete-mercure.fr/>

1.



2.1. $F_{S/MPO} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_{MPO}}{d^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{1,989 \times 10^{30} \times 400}{(57,91 \times 10^9)^2} = 15,8 \text{ N}.$

2.2. $F_{M/MPO} = G \cdot \frac{M_M \cdot M_{MPO}}{(R + h)^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{3,285 \times 10^{23} \times 400}{[(2440 + 500) \times 10^3]^2} = 1,01 \times 10^3 \text{ N}.$

2.3.

Méthode 1 : $\frac{F_{M/MPO}}{F_{S/MPO}} = 64$. Donc la force exercée par Mercure est 64 fois plus grande que celle exercée par le Soleil.

Méthode 2 : $\frac{F_{S/MPO}}{F_{M/MPO}} \times 100 = 1,6 \%$ donc la force exercée par le Soleil correspond à 1,6 % de la force exercée par Mercure.

(Dans le cas où les questions 2.1. et 2.2. ne sont pas posées auparavant).

$$\frac{F_{S/MPO}}{F_{M/MPO}} = \frac{G \cdot \frac{M_S \cdot M_{MPO}}{d^2}}{G \cdot \frac{M_M \cdot M_{MPO}}{(R+h)^2}} = \frac{M_S (R+h)^2}{M_M \cdot d^2} = 1,6 \times 10^{-2} = 1,6 \%$$

3. Énoncé de la 3^{ème} loi de Kepler : Le rapport du carré de la période de révolution T par le cube du demi-grand axe a de l'ellipse est une constante k qui ne dépend que du centre attracteur.

$$\frac{T^2}{a^3} = k.$$

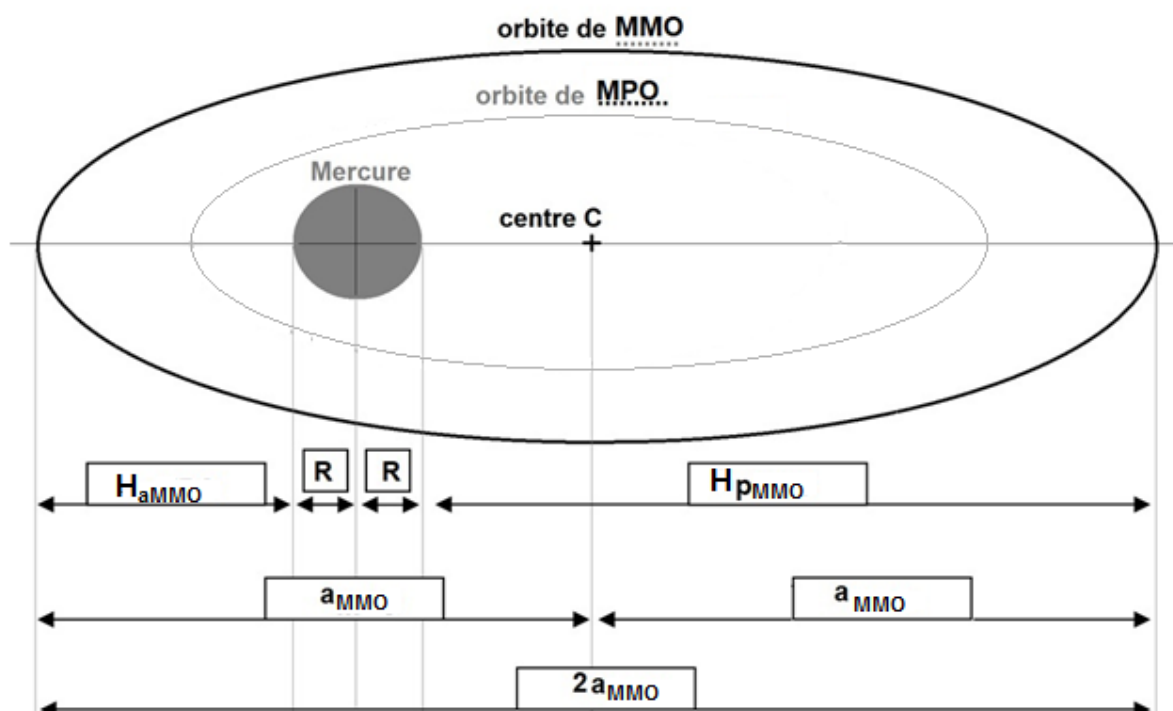
4.1. $\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$. Ce qui donne $T_M = T_T \cdot \sqrt{\left(\frac{a_M}{a_T}\right)^3}$

Soit $T_M = T_T \cdot \sqrt{\left(\frac{a_M}{a_T}\right)^3} = 365,256363 \times \sqrt{\left(\frac{57\,909\,176}{148\,597\,887,5}\right)^3} = \mathbf{88,858692 \text{ j.}}$

4.2. Ecart relatif de : $\frac{88,858692 - 87,96934}{87,96934} = 1,0 \times 10^{-2} = \mathbf{1\%}$.

L'écart relatif est de l'ordre de 1%. On peut considérer qu'il est légitime d'utiliser cette loi dans ce cas.

5.1.



5.2.1. $2 a_{\text{MMO}} = H_{\text{aMMO}} + 2R + H_{\text{pMMO}}$

5.2.2. $a_{\text{MMO}} = \frac{590 + 2 \times 2440 + 11640}{2} = 8555 \text{ km.}$

5.3.1. La 3^{ème} loi de Kepler peut s'écrire ici : $\frac{T_{\text{MPO}}^2}{a_{\text{MPO}}^3} = \frac{T_{\text{MMO}}^2}{a_{\text{MMO}}^3}$ d'où $T_{\text{MMO}} = T_{\text{MPO}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_{\text{MMO}}}{a_{\text{MPO}}}\right)^3}$

Soit : $T_{\text{MMO}} = 2,3 \times \sqrt{\left(\frac{8555}{3430}\right)^3} = 9,06 \text{ h.}$

5.3.2. Cela correspond à un écart relatif de 2,6 % avec la valeur indiquée dans les documents qui est de 9,3h.